Toets

Electriciteit en Magnetisme 1

Dinsdag 2 juni 2009

11:15 – 13:00

Schrijf op elk vel uw naam en studentennummer

Maak elke som op een apart vel

Vraag 1

Gegeven is de vector functie:

$\vec{g}(x, y, z) = (yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z})e^{xyx}$.

a) Bereken $\vec{\nabla} \times \vec{g}$.

b) Laat zien dat $\oint_{P_1} \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$ waarbij P_1 het pad is zoals in fig. 1.

c) Bepaal de functie $f(x_R, y_R, z_R) = \oint_{P_2} \vec{g} \cdot d\vec{l}$ waarbij P_2 het pad is zoals in fig. 2.

d) Bereken $\vec{\nabla}_R f$ waarbij $\vec{\nabla}_R = \frac{\partial}{\partial x_R}\hat{x}_R + \frac{\partial}{\partial y_R}\hat{y}_R + \frac{\partial}{\partial z_R}\hat{z}_R$.

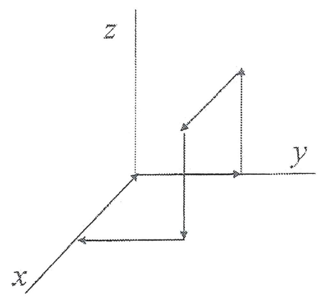


Fig. 1: Pad P_1 (0,0,0)⟶ (0,1,0)⟶ (0,1,1)⟶ (1,1,1)⟶ (0,1,1)⟶ (1,0,0)⟶ ((0,0,0).

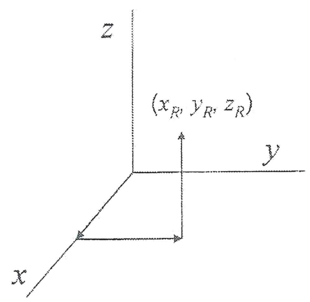


Fig. 2: Pad P_2 (0,0,0)⟶ $(x_R,0,0)$⟶ $(x_R,y_R,0)$ ⟶ (x_R,y_R,z_R).

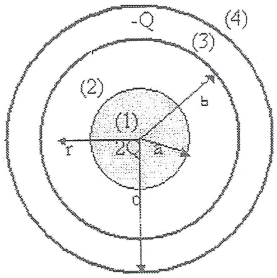
Vraag 2

Gegeven een stelsel van twee concentrische bollen. De binnenste massieve bol heeft een straal a en een ladingsverdeling $\rho(r) = \dfrac{2Q}{a^4\pi} r$ met $Q > 0$.

Daar omheen zit een massieve bolvormige geleider met binnenstraal b en buitenstraal c. De lading van deze geleider is –Q.

In de ruimte tussen beide bollen is vacuum.

In de figuur hieronder staat de opstelling weergeven.



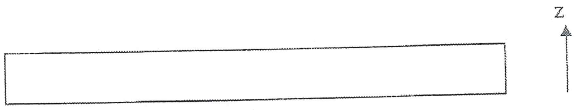
a- Laat zien dat de totale lading van de binnenste bol 2Q is.

b- Bepaal met behulp van de wet van Gauss de elektrische velden in de binnenste bol (1), tussen de twee bollen (2), binnen de buitenste bolvormige geleider (3) en buiten de concentrische bollen (4). Aangenomen mag worden dat dit systeem in elektrostatisch evenwicht is.

c- Bepaal tevens de lading op de schillen met straal b en c.

Vraag 3

Een plak materiaal met dikte d is niet uniform gepolariseerd. De plak is parallel aan het x-y vlak georiënteerd. De polarisatie $\mathbf{P}$ wordt gegeven door $\mathbf{P} = k(2z^2 - d^2)\hat{z}$



a) Bereken de gebonden ladingsdichtheid op het onderoppervlak (z = 0) en op het bovenoppervlak (z = d) van de plak.

b) Bereken de gebonden ruimteladingsdichtheid in de plak.

c) Bereken het elektrisch veld $\mathbf{E}$ in de plak als functie van z.

d) Bereken het potentiaalverschil V tussen het boven- en het onderoppervlak van de plak.

Midtoets

Opgave 1

$\vec{g}(x,y,z) = (yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z})e^{xyz}$

Rotatie $\vec{\nabla}\times\vec{g}$

x-component $\left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial(xye^{xyz})}{\partial y} - \frac{\partial(xze^{xyz})}{\partial z} =$

$xe^{xyz} + x^2yze^{xyz} - xe^{xyz} - x^2yze^{xyz} = 0$

y-component $=0$

z-component $=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{g} = 0$

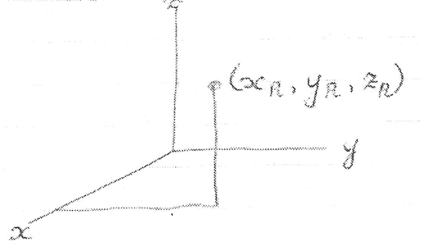
b) 0, vanwege de wet van Stokes

$\int_P (\vec{\nabla}\times\vec{g})\cdot d\vec{a} = 0 = \oint_P \vec{g}\, d\vec{l} = 0$

Bij elk rotatievrij veld is de kringintegraal nul

c) $f(x_2, y_2, z_2) = \int_{P_2}\vec{g}\cdot d\vec{l} = \int_0^{x_R}(\vec{g}\cdot\hat{x})\,dx + \int_0^{y_R}(\vec{g}\cdot\hat{y})\,dy + \int_0^{z_R}(\vec{g}\cdot\hat{z})\,dz$

P_2



$= \int_0^{x_R}\underbrace{\cancel{yze^{xyz}}}_{=0}dx + \int_0^{y_R}\underbrace{\cancel{xze^{xyz}}}_{=0}dy +$

$\int_0^{z_R} x_R\, y_R\, e^{x_R y_R z}\,dz \Rightarrow$

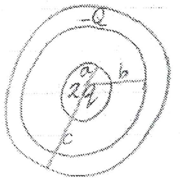
$f(x_R, y_R, z_R) = e^{x_R y_R z_R} - 1$

d) $\vec{\nabla}_R f = \vec{g}(x_R, y_R, z_R)$

Met opgave c kun je van elk rotatievrij veld, het potentiaal vinden.

Opgave 2

ladingsverdeling als functie van de straal: $\rho(r) = \frac{2Q}{a^4\pi}r$, $r<a$

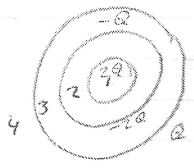


ladingen optellen, dus integreren (geen Gauss)

$$\int_0^a 4\pi r^2 \, \frac{2Q}{a^4\pi} r \, dr = \frac{8Q}{a^4} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^a = 2Q$$

b. Het E-veld in binnenste bol, gebied 1

Het veld in geleider is altijd nul



$$4\pi r^2 E = \int \vec{E} \cdot da = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r 4\pi r'^2 \frac{2Q}{a^4\pi} r' dr'$$

r' = integratievariabele r = constante

① $E = \frac{Q}{2\pi a^4 \varepsilon_0} r^2 \hat{r}$

Er wordt een lading geïnduceerd om 2Q, bestaand uit -2Q. In gebied 3 moet aan de binnenste rand -2Q bevinden

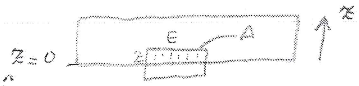
② Omsloten lading = 2Q

$$4\pi r^2 E = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi r^2} \hat{r}$$

③ $E = 0$, zit tussen 2 geleiders

④ $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \hat{r}$

Opgave 3



$$\vec{P} = k(2z^2 - d^2)\hat{z}$$

a) $\sigma_b(z=0) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P}(-\hat{z}) = kd^2$

$\sigma_b(z=d) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P}(\hat{z}) = k(2d^2 - d^2) = kd^2$

b. $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial z} = -4kz$

c. $AE = \frac{A}{\varepsilon_0} \sigma_b(z=0) + \frac{A}{\varepsilon_0} \int_0^z -4kz' dz$

$$\vec{E} = \frac{k}{\varepsilon_0}(d^2 - 2z^2)\hat{z}$$

d. $V = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \vec{E} dz = -\frac{1}{3} \frac{kd^3}{\varepsilon_0}$

Omsloten lading is nul dus er kan geen veld buiten zijn.